

Tvíhliða dreifigreining

Fyrirlestur í Tölfræði III (10.02.62)

Dæmi um marghliða dreifigreiningu

Taflan sýnir meðaleinkunnir eftir þrjú misseri í háskóla eftir aðalgrein fyrir nemendur sem voru í tölvufræði á fyrsta misseri.

Hér eru niðurstöður ekki brotnar niður eftir einni frumbreytu heldur samtímis fyrir tvær. Gögnin henta fyrir tvíhliða dreifigreiningu.

Hún hefur ákveðna kosti umfram einhliða dreifigreiningu: Þátttakendur geta verið færri, mat á villunni verður lægra og hægt að skoða samvirkni.

| Aðalgrein | Kynferði | | Heild |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| | Karlar | Konur | |
| Tölvufræði | 2,7 (0,68) | 3,0 (0,53) | 2,9 (0,62) |
| Verkfræði | 3,1 (0,51) | 3,1 (0,65) | 3,1 (0,58) |
| Annað | 2,0 (0,73) | 2,5 (0,77) | 2,3 (0,78) |
| Heild | 2,6 (0,78) | 2,9 (0,69) | 2,7 (0,75) |

Staðalfrávik eru innan sviga. $n=39$ í hverju hólfni sniðsins.

Við köllum þetta „krossaða“ töflu.

Fjöldi þátttakenda

Tvíhliða dreifigreining prófar báðar frumbreytur í sömu úrvinnslu. Áhrif kynferðis er prófað í tveimur 117 manna hópum og áhrif aðalgreinar í þremur 78 manna hópum.

Í einhliða dreifigreiningu þyrfti tvö 234 manna úrtök til að prófa báðar frumbreytur. Með því að krossa breyturnar í einni og sömu rannsóknin getum við prófað áhrif beggja breyta með helmingi færri þátttakendum og því minni tilkostnaði en ef breyturnar væru ekki krossaðar.

| Aðalgrein | Kynferði | | Heild |
|------------|----------|-------|-------|
| | Karlar | Konur | |
| Tölvufræði | 39 | 39 | 78 |
| Verkfræði | 39 | 39 | 78 |
| Annað | 39 | 39 | 78 |
| Heild | 117 | 117 | 234 |

Ef við gerðum eina rannsókn fyrir hvora frumbreytu, væri hvor rannsókn um helmingi minni en í krossaða sniðinu. Nákvæmni mats á þýðismeðaltölum myndi þá minnka um 30% þar sem staðalvillan er σ/\sqrt{n} .

Lægra mat á villunni

Leifin er mat okkar á villunni. Matið ræðst af því hvort öllum mikilvægum breytum er haldið inni í líkaninu.

Ef Aðalgrein hefur umtalsverð áhrif á einkunn, er villan ofmetið ef aðeins Kynferði er inni í líkaninu.

Myndin sýnir að í einhliða greiningu er leifin 98% af heildardreifingunni. Ef Aðalgrein er tekin inn í myndina, ræðst um 21% dreifingarinnar af henni. Villan er því mun minni en við höldum þar sem leifin er aðeins 77% af heildardreifingunni.

| Hrif | Summa kvaðrata | df | Meðalsumma kvaðrata | F | p |
|-------------|----------------|------------|---------------------|-----|-------|
| Kynferði | 3,1 | 1 | 3,11 | 5,7 | 0,018 |
| Leif | 126,2 | 232 | 0,54 | | |
| Heild | 129,3 | 233 | | | |

| Hrif | Summa kvaðrata | df | Meðalsumma kvaðrata | F | p |
|-------------|----------------|------------|---------------------|------|-------|
| Kynferði | 3,1 | 1 | 3,11 | 7,2 | 0,008 |
| Aðalgrein | 26,8 | 2 | 13,38 | 30,9 | 0,000 |
| Leif | 99,5 | 230 | 0,43 | | |
| Heild | 129,3 | 233 | | | |

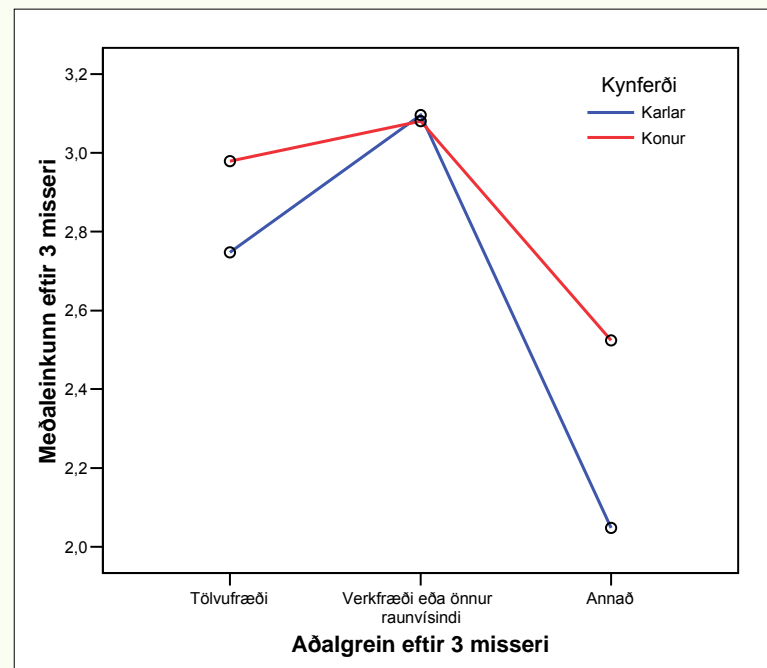
Þegar frumbreytum fjölga, minnkar summa kvaðrata fyrir leifina. Frígráðum leifarinnar fækkar hins vegar einnig og því ekki víst að mat okkar á villunni minnki. Því þarf alltaf að ígrunda hvaða frumbreytur fari inn í líkanið.

Samvirkni (*interaction*)

Myndin sýnir að einkunnir eru ólíkar eftir aðalgrein og að konur hafa að jafnaði hærra einkunn en karlar.

Áhrif Aðalgreinar eru misjöfn eftir kynferði og því segjum við að það sé samvirkni milli Aðalgreinar og Kynferðis.

Samvirkni eru hrif sem við getum aðeins metið í tvíhliða eða marghliða dreifigreiningu. Hún er því enn ein röksemdin fyrir því að nota tvíhliða dreifigreiningu í stað einhliða.



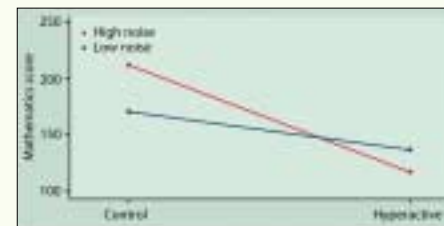
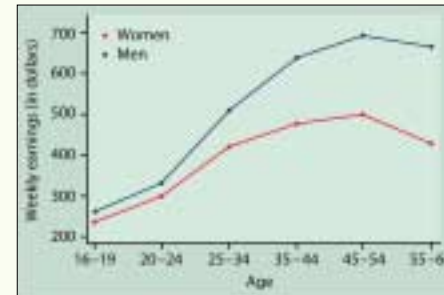
Dæmi um samvirkni

Samvirkni er til staðar þegar línur línuritanna eru ekki samsíða.

Þær taka ýmis form. Efsta myndin sýnir mismikil kynjahrif eftir aldri en þó þannig að karlar eru alltaf hærri. Hér væri réttmætt en villandi að segja karla að meðaltali hærri en konur.

Miðmyndin sýnir kynin stundum jöfn en karla stundum hærri. Hér væri afar villandi að segja karla hærri en konur.

Neðsta myndin sýnir ýmis konur eða karla hærri. Hér væri beinlínis rangt að túlka kynjahrifin.



Líkan tvíhliða dreifigreiningar

Líkan tvíhliða dreifigreiningar er svipað einhliða dreifigreiningu. Við gerum ráð fyrir að mæligildi hvers staks ráðist af meðaltali hópsins og fráviki frá þessu meðaltali (villunni). Hér miðast meðaltal hópsins við krossun frumbreytanna og því hefur það tvö niðurskrifuð auðkenni.

Villan hefur sömu eiginleika og áður þ.e. normaldreifingu með meðaltalið 0,0, eitt staðalfrávik óháð hólfum líkansins og engin tengsl milli einstakra niðurstaðna (óháð villa).

$$x_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$
$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma)$$

Mat á líkaninu

Þýðismeðaltölin eru metin með samsvarandi úrtaksmeðaltölum.

Villan er metin með leifinni, þ.e. frávikinunni frá úrtaksmeðaltali hópsins.

Við getum skoðað leifina til að meta eiginleika villunnar. Ef dreifing leifarinnar svipar til normaldreifingar, engin áberandi fráviksgildi eru til staðar og staðalfrávikin eru svipuð í öllum hólfum sniðsins, getum við gert ráð fyrir því að forsendur tvíhliða dreifigreiningar séu fyrir hendi.

$$x_{ijk} = \hat{\mu}_{ij} + e_{ijk}$$

$$e_{ijk} = x_{ijk} - \hat{\mu}_{ij}$$

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{x}_{ij} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_k x_{ijk}$$

Meginhrif og samvirkni

Meðaltal hvers hóls má sundurliða í fjóra áhrifaþætti.

Venjulega skiptum við okkur ekki af heildarmeðaltalinu heldur vinnum með fráviknið frá því: $\mu_{ij} - \mu_t$.

Meðaltali hóps er deilt niður í heildarmeðaltalið, meginhrif fyrir frumbreyturnar tvær og samvirknihrif þeirra.

Tvíhliða dreifigreining byggist á því að ákvarða framlag hverra hrifa fyrir sig til hópmeðaltalanna.

$$\mu_{ij} = \mu_t + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$$

$$\mu_{ij} - \mu_t = \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$$

Mat á samvirkni

Breytileiki vegna samvirkni er metinn á sama hátt og meginhrif. Við fáum summu kvaðrata og getum reiknað meðalsummu kvaðrata og F -próf.

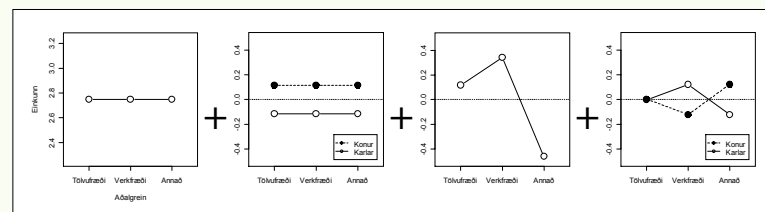
F -prófið prófar þá núlltilgátu að öll samvirknihrifin séu núll í þýði. Það samsvarar því að hópmeðaltölin ráðist fullkomlega af meginhrifunum í þýði.

Ef F -prófið er marktækt, getum við gert ráð fyrir að meginhrifin dugi ekki til að lýsa hópmeðaltölunum heldur bætist samvirknihrif við hvert þeirra.

| Hrif | Summa kvaðrata | df | Meðalsumma kvaðrata | F | p |
|----------------------|----------------|-----|---------------------|------|-------|
| Kynferði | 3,1 | 1 | 3,11 | 7,3 | 0,007 |
| Aðalgrein | 26,8 | 2 | 13,38 | 31,4 | 0,000 |
| Kynferði * Aðalgrein | 2,4 | 2 | 1,18 | 2,8 | 0,065 |
| Leif | 97,1 | 228 | 0,43 | | |
| Heild | 129,3 | 233 | | | |

| Aðalgrein | Kynferði | |
|------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| | Karlar | Konur |
| Tölvufræði | $2,74 - 0,12 + 0,12 - 0,00 = 2,7$ | $2,74 + 0,12 + 0,12 + 0,00 = 3,0$ |
| Verkfræði | $2,74 - 0,12 + 0,34 + 0,12 = 3,1$ | $2,74 + 0,12 + 0,34 - 0,12 = 3,1$ |
| Annað | $2,74 - 0,12 - 0,46 - 0,12 = 2,0$ | $2,74 + 0,12 - 0,46 + 0,12 = 2,5$ |

$\mu_{ij} = \mu_t + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$



Sundurliðun dreifingar

Við getum sundurliðað meðaltölin niður í meginhrif og samvirknihrif. Sama gildir því um dreifinguna.

Heildardreifingin skiptist í tvenn meginhrif, samvirknihrif og leif. Summa kvaðrata skiptist samsvarandi og frígráður deilast niður á sama hátt.

Taktu eftir því að summa kvaðrata fyrir leifina er minni en þegar aðeins voru meginhrif, sbr. [Lægra mat á villunni](#). Metið staðalfrávik er þó svipað og áður þar sem frígráðum leifar hefur fækkað einnig.

| Hrif | Summa kvaðrata | df | Meðalsumma kvaðrata | F | p |
|----------------------|----------------|-----|---------------------|------|-------|
| Kynferði | 3,1 | 1 | 3,11 | 7,3 | 0,007 |
| Aðalgrein | 26,8 | 2 | 13,38 | 31,4 | 0,000 |
| Kynferði * Aðalgrein | 2,4 | 2 | 1,18 | 2,8 | 0,065 |
| Leif | 97,1 | 228 | 0,43 | | |
| Heild | 129,3 | 233 | | | |

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E$$
$$df_T = df_A + df_B + df_{AB} + df_E$$

Þessi niðurdeiling breytileikans gildir þegar jafn fjöldi er í öllum hólfum. Þegar ójafnt er í hólfum sniðsins, leggst breytileika hrifa ekki saman í heildarbreytileikann.

Lýsandi tölfraði

Hér virðist allt með felldu.

Það eru engin brottfallsgildi, þar sem allir 234 þátttakendur eru með í töflunni.

Það er jafnt í öllum hólfum.

Meðaltölin eru öll eðlileg innan 0–4 markanna.

Lægsta staðalfrávikin er 0,51 en það hæsta 0,77. Hlutfallið hæsta og lægsta er $0,77/0,51 \approx 1,5$ eða vel innan marka.

Há meðaltöl eru með lág staðalfrávik og lág meðaltöl með há staðalfrávik.

| Report | | | | |
|--|---------------------------------|--------|-----|----------------|
| Meðaleinkunn í háskóla eftir þjú misseri | | | | |
| Kynferði | Aðalgrein eftir 3 misseri | Mean | N | Std. Deviation |
| Karlar | Tölvufræði | 2,7474 | 39 | ,68399 |
| | Verkfræði eða önnur raunvísindi | 3,0964 | 39 | ,51297 |
| | Annað | 2,0477 | 39 | ,73041 |
| | Total | 2,6305 | 117 | ,77846 |
| Konur | Tölvufræði | 2,9792 | 39 | ,53347 |
| | Verkfræði eða önnur raunvísindi | 3,0808 | 39 | ,64813 |
| | Annað | 2,5236 | 39 | ,76556 |
| | Total | 2,8612 | 117 | ,69430 |
| Total | Tölvufræði | 2,8633 | 78 | ,62043 |
| | Verkfræði eða önnur raunvísindi | 3,0886 | 78 | ,58072 |
| | Annað | 2,2856 | 78 | ,78094 |
| | Total | 2,7459 | 234 | ,74502 |

Lægsta staðalfrávikin

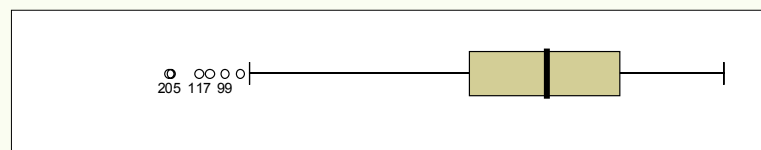
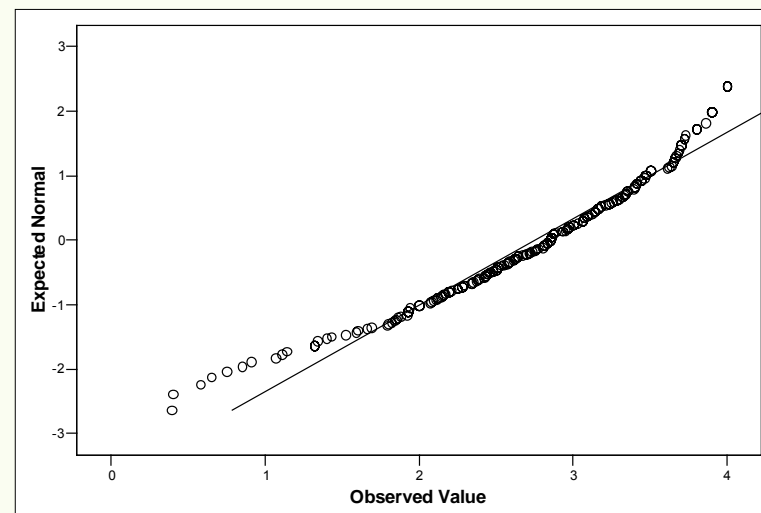
Hæsta staðalfrávikin

Skoðun á fylgibreytu

Fylgibreytan fyllir vel upp í 0 til 4 kvarðann. Dreifingin er mjög nálægt normaldreifingu en með langan neðri hala. Það vottar einnig fyrir rjáfurhrifum.

Fráviksgildin í neðri halanum verður til þess að við viljum vera á varðbergi gagnvart frávillingum.

Breytan er takmörkuð og tekur ekki gildi lægri en 0,0. Því er óvíst að frávillingar eigi eftir að valda erfiðleikum.

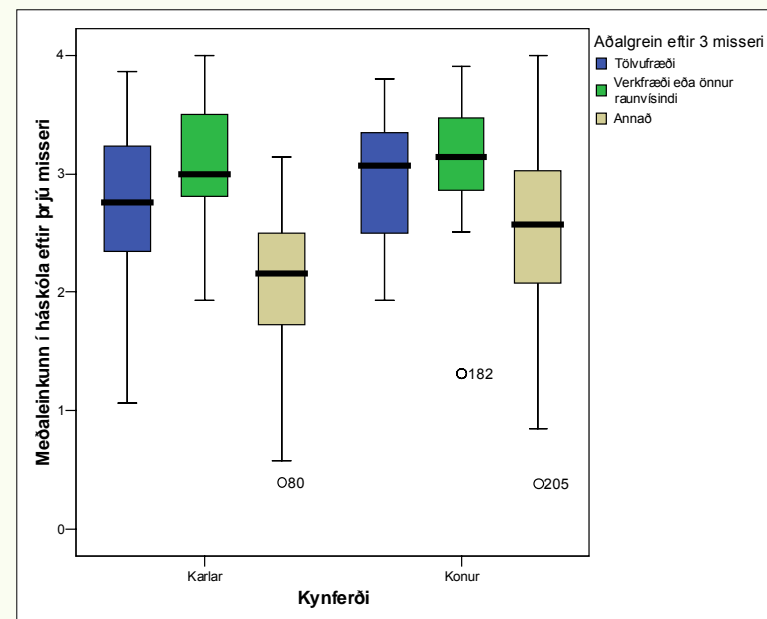


Misleitni

Krossað kassarit styður það sem við töldum okkur sjá þegar fylgibreytan var skoðuð.

Það er lítil misleitni en því neðar sem kassarnir eru á myndinni því stærri eru þeir. Neðri skeggin eru almennt mun lengri en þau efri, hugsanlega vísbending um rjáfurhrif.

Nokkur fráviksgildi en mest hjá konum í verkfræði. Þar er neðri halinn einnig mjög stuttur. Myndræn athugun á leif myndi sýna þetta betur.



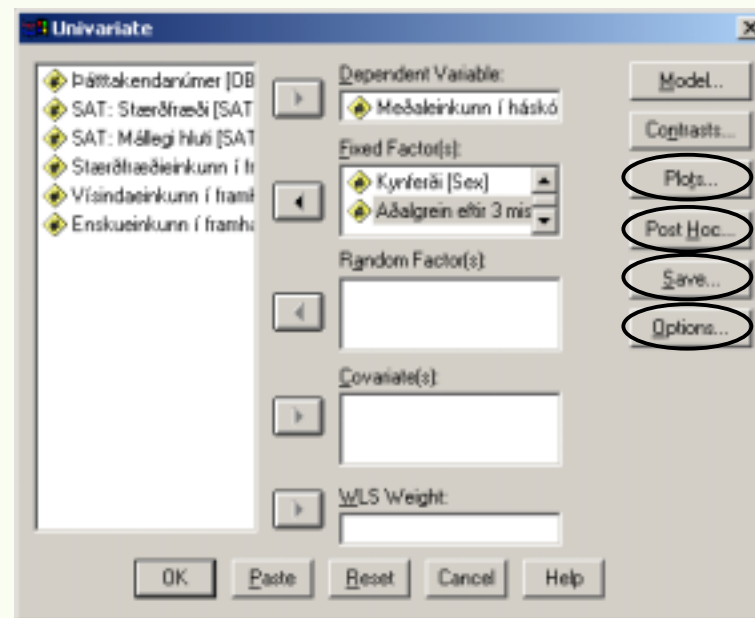
Framkvæmd úrvinnslunnar

Úrvinnslan er framkvæmd svipað og í einhliða dreifigreiningu.

Við förum í **Analyze/General Linear Model/Univariate** og setjum fylgibreytuna í efsta textareitinn og frumbreyturnar báðar í þann næsta.

Við notum merktu takkana til að biðja um viðbótarúrvinnslu svipað og þegar við gerðum einhliða dreifigreiningu.

Að lokum ýtum við á **OK** til að byrja úrvinnsluna eða **Paste** til að fá skipunina yfir í skipanagluggann.

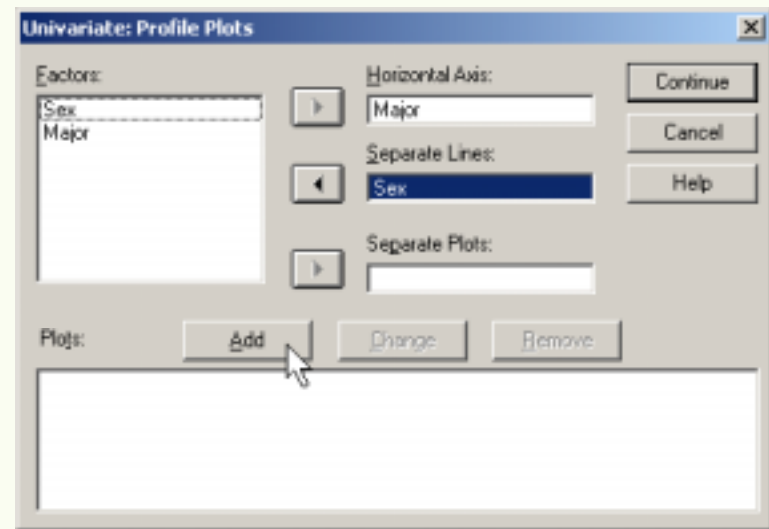


Beðið um línurit meðaltala

Við notum sams konar stillingar og fyrir einhliða dreifgreiningu.

Auk þess förum við í **Plots**, setjum aðra frumbreytuna í efri textareitinn og hina í þann neðri og smellum svo á **Add**.

Að síðustu smellum við á **Continue** til að fá hefðbundið samvirknirit fyrir tvíhliða dreifgreiningu



Próf Levenes

Próf Levenes er ómarktækt.

Áður vorum við búin að sjá að hæsta úrtaksstaðalfrávik var 1,5 af því lægsta og því ekki vísbending um alvarlega misleitni.

Krossaða kassaritið gaf til kynna að dreifingin ykist eftir því sem meðaltöl væru lægri, sama sýnir myndin.

Það er því væg vísbending um misleitni væntanlega tengt skekkju í villudreifingu en sennilega engin stór frávik.

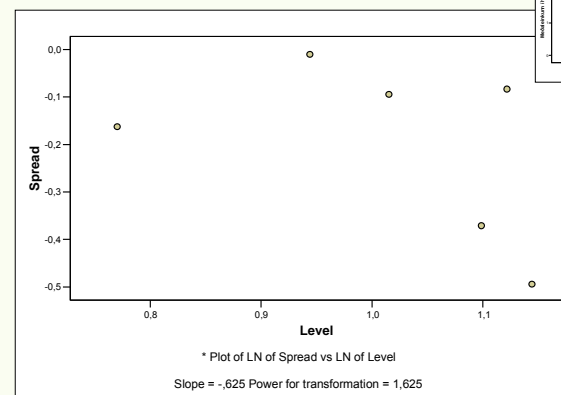
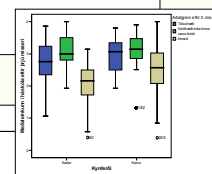
Levene's Test of Equality of Error Variances

Dependent Variable: Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misse

| F | df1 | df2 | Sig. |
|-------|-----|-----|------|
| 1,366 | 5 | 228 | ,238 |

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

a. Design: Intercept+Sex+Major+Sex * Major



Dreifigreiningartaflan

Hér fáum við flóknu og ruglingslegu dreifigreiningartöflu SPSS.

Við getum fullyrt að einkunn sé ólík eftir kyni og einnig ólík eftir aðalgrein.

Við vorum búin að sjá að mynstur meðaltala yfir aðalgreinar var annað fyrir karla heldur en konur. Þessar niðurstöður koma í veg fyrir að við getum fullyrt að svo sé í þýði. Hins vegar væri varhugavert að fullyrða blákalt að engin samvirkni sé í þýði.

| Tests of Between-Subjects Effects | | | | | |
|--|-------------------------|-----|-------------|----------|------|
| Dependent Variable: Meðaleinkunn í háskóla eftir þjú misseri | | | | | |
| Source | Type III Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
| Corrected Model | 32,228 ^a | 5 | 6,446 | 15,135 | ,000 |
| Intercept | 1764,294 | 1 | 1764,294 | 4142,790 | ,000 |
| Sex | 3,113 | 1 | 3,113 | 7,310 | ,007 |
| Major | 26,759 | 2 | 13,380 | 31,417 | ,000 |
| Sex * Major | 2,356 | 2 | 1,178 | 2,766 | ,065 |
| Error | 97,099 | 228 | ,426 | | |
| Total | 1893,620 | 234 | | | |
| Corrected Total | 129,326 | 233 | | | |

^a. R Squared = ,249 (Adjusted R Squared = ,233)

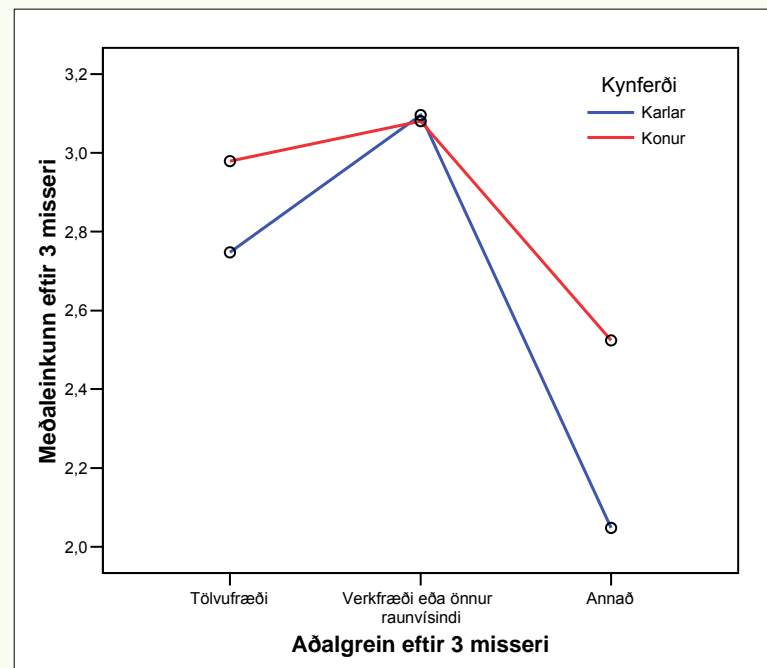
Línurit yfir meðaltöl

Þessa mynd sýndi ég ykkur áður en hér er hún til að hjálpa við túlkun niðurstaðna.

Við sjáum að konur eru með hærri einkunnir að jafnaði heldur en karlar.

Einkunnir eru hæstar í tölvufræði og verkfræði en lægstar í öðrum greinum.

Samvirknin bendir til að yfirburðir kvenna séu ekki fyrir hendi í verkfræði. Við getum þó ekkert fullyrt því hrifin ná ekki marktækt.



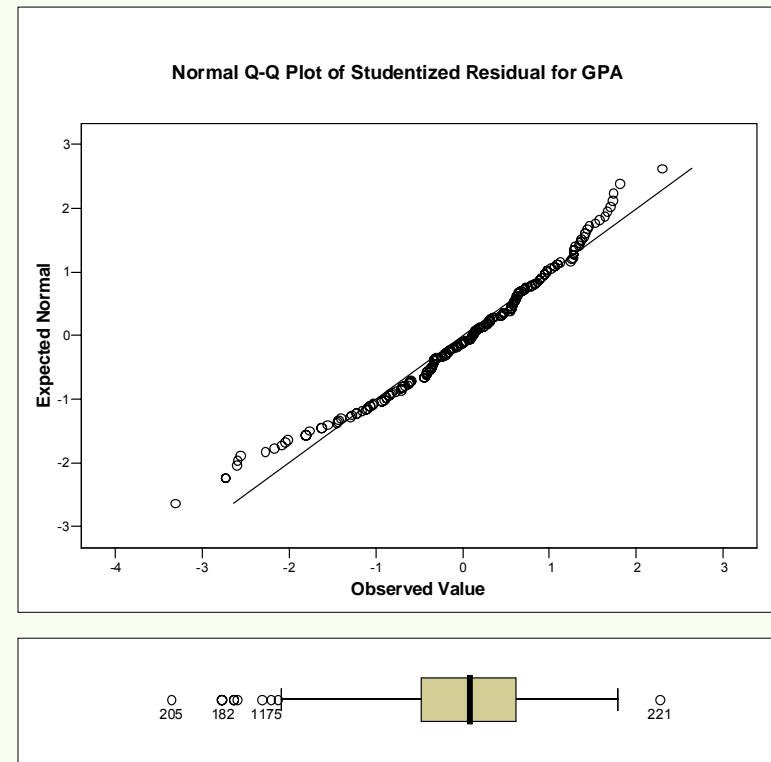
Athugun á leif

Athugun á leifinni styður það sem við töldum okkur áður vita.

Það er lítils háttar neikvæð skekkja með tilhneigingu til fráviksgilda. Villan er því hugsanlega ekki fyllilega normaldreifð.

Frávik frá normaldreifingu eru þó ekki stórvægileg. Það væri helst ef fráviksgildi yllu erfiðleikum.

Hugsanlega þurfum við ekkert að gera en til álita kæmi að umbreyta gögnunum.



Fyrirfram samanburðir

Við höfum engar fyrirfram tilgátur og því er ekki réttmætt að prófa samanburði án leiðréttingar.

Til gamans sýni ég þó óleiðréttan samanburð raungreina á móti öðrum greinum.

Samkvæmt honum eru einkunnir 0,7 hærri í raungreinum en öðrum.

Samanburður þeirra við aðrar greinar skýra yfir 90% af þeim breytileika sem tilheyrir meginhrifum

Aðalgreinar.

UNIANOVA
GPA BY Sex Major
/Contrast(Major)= SPECIAL (0.5 0.5 -1) .

| Contrast Results (K Matrix) | | | |
|-----------------------------|--|---|------|
| | | Dependent Variable | |
| | | Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misseri | |
| Aðalgrein eftir 3 misseri | | | |
| Special Contrast | | | |
| L1 | Contrast Estimate | | ,690 |
| | Hypothesized Value | | 0 |
| | Difference (Estimate - Hypothesized) | | ,690 |
| | Std. Error | | ,090 |
| | Sig. | | ,000 |
| | 95% Confidence Interval for Difference | Lower Bound | ,512 |
| | | Upper Bound | ,869 |

| Test Results | | | | | |
|---|----------------|-----|-------------|--------|------|
| Dependent Variable: Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misseri | | | | | |
| Source | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
| Contrast | 24,780 | 1 | 24,780 | 58,187 | ,000 |
| Error | 97,099 | 228 | ,426 | | |

Samanburðir með aðferð Bonferroni

Eftir á samanburði getum við gert með aðferð Bonferronis.

Niðurstaða paraðra samanburða er í samræmi við það sem við höfum þegar komist að.

Við getum fullyrt að það séu hærrí einkunnir hjá þeim sem eru áfram í Tölvunarfræði en þeim sem hafa skipt yfir í aðrar greinar. Við getum einnig fullyrt að einkunnir séu hærrí hjá þeim sem hafa skipt yfir í verkfræði heldur en þeim sem fóru í annað.

| Multiple Comparisons | | | | | | |
|---|---------------------------------|-----------------------|------------|------|-------------------------|-------------|
| Dependent Variable: Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misseri | | | | | | |
| Bonferroni | | | | | | |
| (I) Aðalgrein eftir 3 misseri | (J) Aðalgrein eftir 3 misseri | Mean Difference (I-J) | Std. Error | Sig. | 95% Confidence Interval | |
| | | | | | Lower Bound | Upper Bound |
| Tölvufræði | Verkfræði eða önnur raunvísindi | -,2253 | ,10450 | ,096 | -,4773 | ,0268 |
| | Annað | ,5777* | ,10450 | ,000 | ,3257 | ,8297 |
| Verkfræði eða önnur raunvísindi | Tölvufræði | ,2253 | ,10450 | ,096 | -,0268 | ,4773 |
| | Annað | ,8029* | ,10450 | ,000 | ,5509 | 1,0550 |
| Annað | Tölvufræði | -,5777* | ,10450 | ,000 | -,8297 | -,3257 |
| | Verkfræði eða önnur raunvísindi | -,8029* | ,10450 | ,000 | -1,0550 | -,5509 |

Based on observed means.
*. The mean difference is significant at the ,050 level.

| Aðalgrein | Meðaltal | Staðalfrávik | Fjöldi |
|---------------|------------------|--------------|--------|
| Tölvunarfræði | 2,9 _a | 0,62 | 39 |
| Verkfræði | 3,1 _a | 0,58 | 39 |
| Annað | 2,3 _b | 0,78 | 39 |
| Heild | 2,7 | 0,75 | 117 |

Meðaltöl með ólíka niðurskrifaða bókstafi eru ólík samkvæmt aðferð Bonferronis.

Samanburðir með Scheffé

Scheffé gerir okkur kleift að gera hvaða samanburð sem er, ekki endilega paraðan.

Við þurfum að taka niðurstöðuna og deila í F -ið með frígráðunum. Aðalgrein hefur tvær frígráður.

Fyrir fyrri samanburðinn fáum við því $F(1, 228) = 58,187/2 = 29,1$, $p < 0,001$. Sá seinni gefur $F(1, 228) = 4,647/2 = 2,3$, $p > 0,10$. Fyrri samanburðurinn skiptir langmestu máli en við getum ekki útilokað áhrif hins í þýði.

UNIANOVA
GPA BY Sex Major
/Contrast(Major)= SPECIAL (0.5 0.5 -1)
/Contrast(Major)= SPECIAL (1 -1 0).

| Test Results | | | | | |
|---|----------------|-----|-------------|--------|------|
| Dependent Variable: Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misseri | | | | | |
| Source | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
| Contrast | 24,780 | 1 | 24,780 | 58,187 | ,000 |
| Error | 97,099 | 228 | ,426 | | |

| Test Results | | | | | |
|---|----------------|-----|-------------|-------|------|
| Dependent Variable: Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misseri | | | | | |
| Source | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
| Contrast | 1,979 | 1 | 1,979 | 4,647 | ,032 |
| Error | 97,099 | 228 | ,426 | | |