Ályktanir í tveimur hópum

Fyrirlestur í Aðferðafræði II

Ályktun í einum hópi

Samanburður við viðmiðsgildi

Þegar ályktað er um einn hóp gefur núlltilgátan (T_0) þýðistöluna upp sem eitt tiltekið gildi, *viðmiðsgildið*.

Við höfum eina úrtakstölu, t.d. meðaltal. Meðaltalið endurspeglar þýðið ekki nákvæmlega. Við viljum vita hvort úrtaksmeðaltalið víkur það mikið frá viðmiðsgildinu að hún sé ósennileg ef núlltilgátan væri rétt.

Ef úrtakstalan er ósennileg, höfnum við núlltilgátunni og tökum upp aðaltilgátuna í staðinn.

Ályktunarferlið

Ein úrtakstala (meðaltal, hlutfall, …)

Við setjum fram aðaltilgátu (T_1) og núlltilgátuna (T_0), andhverfu hennar.

Eitt viðmiðsgildi (þýðistalan undir T_0).

Við búum til líkan yfir breytileika úrtakstölunnar frá einu úrtaki til annars undir T_0.

Við berum úrtakstöluna saman við viðmiðsgildið; breytileiki úrtaka verður til þess að hún víkur frá viðmiðsgildinu.

Ef úrtakstalan er ólíkleg ef T_0 er rétt, höfnum við núlltilgátunni og tökum upp aðaltilgátuna.

Ályktun í tveimur hópum

Mismunur tveggja úrtakstalna

Tveir hópar hvor með sitt meðaltal og staðalfrávik í þýði, þ.e. tvö þýði.

Við höfum aðeins úrtaksupplýsingar um hópanna, þ.e. tvö úrtaksmeðaltöl og tvö úrtaksstaðalfrávik. Þessar úrtakstölur eru breytilegar frá einu úrtaki til annars.

Við viljum vita hvort munur sé á meðaltölunum í þýði. Því setjum við fram núlltilgátu, búum til líkan yfir breytileika í mismun meðaltalanna frá einu úrtaki til annars.

Ályktunarferlið

Tvær úrtakstölur (meðaltal, hlutfall, …)

Við setjum fram aðaltilgátu (T_1) og núlltilgátuna (T_0), andhverfu hennar.

Það er ekkert viðmiðsgildi heldur tilgreinir T_0 að enginn munur sé á meðaltölunum í þýði.

Við búum til líkan yfir það hvernig meðtaltalsmunurinn breyttist frá einu úrtaki til annars ef T_0 væri rétt.

Ef mismunur meðaltalanna í úrtakinu er það mikill að hann væri ólíklegur ef núlltilgátan væri rétt, höfnum við henni og tökum upp aðaltilgátuna.

Dæmi um rannsókn

Athugun á prófkvíða hjá nýnemum

Þátttakendum er skipt í tvo hópa með tilviljunarskiptingu (*random assignment*).

Tilviljunarskipting tryggir að munur á hópunum ræðst af líkindum og því hægt að reikna hversu ólíkir hóparnir geta orðið að jafnaði.

Annar hópurinn fær ráðgjöf og þjálfun vegna prófkvíða; nefndur tilrauna- eða þjálfunarhópur.

Hinn fær ekkert inngrip (*intervention*); samanburðarhópur.

Ef inngripið hefur engin áhrif, ætti mismunur hópanna að ráðast af tilviljun einni.

Einstaklingar úr þýði þeirra sem fá aðstoð vegna prófkvíða

Einstaklingar úr þýði þeirra sem fá enga aðstoð

Við gerum ráð fyrir að inngripið hafi áhrif og frammistaða tilraunahópsins sé því önnur en samanburðarhópsins á prófi.

Áhrif inngripsins bætist þá við þann mun sem verður á milli hópanna vegna þess að þátttakendum var skipt í þá eftir tilviljun.

Tilgátur

Við gerum ráð fyrir að þýði þeirra sem fá rágjöf og þjálfun einkennist af annarri meðaleinkunn en þýði þeirra sem eru í samanburðarhópi.

$$\mathrm{T}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\mathrm{T}_0 : \mu_1 = \mu_2$$

Núlltilgátan er andhverfa aðaltilgátunnar eins og áður.

Þetta er sett upp sem tvíhliða tilgátur, þ.e. bæði jákvæð og neikvæð áhrif eru í samræmi við aðaltilgátuna.

Tveir þættir geta orðið til þess að munur sé á *úrtaks*meðaltölum í hópunum tveimur.

- Tilviljunarbundin breytileiki milli úrtaka vegna vals í hópanna tvo.
- Áhrif inngripsins (til góðs eða ills), þ.e. munur *þýðis*meðaltala.

Fyrri áhrifaþátturinn er alltaf til staðar en sá seinni aðeins ef T_0 er röng.

Ef munur á hópunum tveimur í úrtaki er meiri en svo að það samræmist fyrri möguleikanum, ályktum við að seinni möguleikinn sé fyrir hendi.

Úrtakadreifing óháðra meðaltala

Tilgátur sem meðaltalsmunur

Tvíhliða tilgátur má einnig setja upp sem mismun meðaltala.

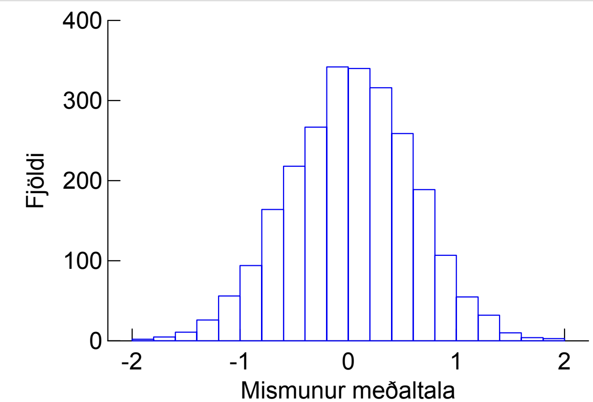
T_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

T_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Núlltilgátan lýsir tilteknu ástand í þýði. Við getum búið til líkindalíkan sem lýsir breytileika meðaltalsmunar þegar núlltilgátan er rétt.

Ef munur meðaltala í úrtaki er það mikill að hann væri ólíklegur ef núlltilgátan væri rétt, höfnum við henni og tökum upp aðaltilgátuna að munur sé á þýðismeðaltölunum.

Mismunur meðaltala undir T_0; n= 20



Undir T_0 er mismunur úrtaksmeðaltala eingöngu tilkominn vegna vals í hópanna tvo. Við getum metið þennan breytileika frá einu úrtaki til annars, úrtakadreifingu mismunarins. Myndin sýnir dreifinguna fyrir 2.500 úrtök miðað við að T_0 sé rétt.

Grunnupplýsingar

Ég tek 40 manna tilviljunarúrtak og skipti með hendingaraðferð í tvo hópa.

Annar hópurinn fær ráðgjöf og þjálfun vegna prófkvíða en hinn ekki.

Ég hef aðgang að einkunnum þeirra að lokinni meðferð.

Grunnupplýsingar

$n_1 = n_2 = 20$

$\overline{X}_1 = 8{,}3$

$s_1 = 1{,}26$

$\overline{X}_2 = 7{,}0$

$s_2 = 1{,}78$

1. Setja fram aðal- og núlltilgátu
2. Velja marktektarstig (α)
3. Framkvæma rannsóknina og fá upplýsingar úr úrtökunum
4. Reikna *t*- eða *z*-próf eftir því hvort á við
5. Bera saman við vendigildi eða reikna *p*
6. Túlka niðurstöðu

Formúlur fyrir *t* í óháðum hópum

Staðalvillan gefur okkur úrtakadreifingu (*sampling distribution*) fyrir mismun meðaltalanna.

Skv.markgildissetningunni er úrtakadreifingin normallaga.

t-prófið metur hversu líklegur þessi mismunur meðaltala í úrtakinu er undir núlltilgátunni.

t-próf

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

Staðalvilla

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

A:7.3, bls. 220–221

Útreikningur *t*-prófs í tveimur hópum

Staðalvilla

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1{,}261^2}{20}+\frac{1{,}777^2}{20}}$$
$$= \sqrt{\frac{1{,}590}{20}+\frac{3{,}158}{20}}$$
$$= \sqrt{0{,}0795+0{,}158}$$
$$= \sqrt{0{,}237} = 0{,}487$$

t-próf

$$t = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{8{,}3-7{,}0}{0{,}487}$$
$$= \frac{1{,}3}{0{,}487} = 2{,}67$$

$df = n_1 + n_2 - 2 = 40 - 2 = 38$

$t(38)_{0{,}025} \approx 1{,}96$

Ólík staðalfrávik í þýði

Aðgreindar dreifitölur

Hingað til höfum við gert ráð fyrir að þýðisstaðalfrávikin séu ólík fyrir hópana tvo, þ.e. $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Oft er eðlilegt að gera ráð fyrir þessu; áhrif inngrips geta t.d. verið breytileg eftir einstaklingum og því breytt dreifingu jafnvel þótt meðaltalið breytist ekki.

Staðalvillan sem við höfum notað á aðeins við ef $\sigma_1 \neq \sigma_2$ og gefur aðeins góða *nálgun* að úrtakadreifingunni. Niðurstaða *t*-prófsins er því ekki fyllilega námkvæm. Algengast er að leiðrétta það með því að breyta vendigildinu sem flett er upp.

$$df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{n_1} + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{n_2}} - 2$$

Formúlan sýnir Welch-Satterthwaite leiðréttinguna. Með henni eru reiknaðar breyttar frígráður sem eru notaðar til að fletta upp vendigildinu.

Leiðréttingin skiptir aðeins máli ef úrtök eru lítil, misstór og *úrtaks*staðalfrávikin eru ólík í hópunum tveimur.

A:7.3, bls. 223–224

Leiðrétting frígráða

Welch-Satterthwaite leiðrétting

Hér til hliðar hafa frígráðurnar verið leiðréttar. Áður flettum við t-gildinu upp miðað við 38 frígráður og fengum vendigildið $t(38)_{0,025} \approx 1,96$.

Leiðréttingin gefur til kynna að við höfum lítillega ofmetið frávikið frá núlltilgátunni; við ættum að finna vendigildið með því að fletta upp miðað við 34 frígráður. Í reynd skiptir það þó ekki máli því nýja vendigildið er $t(34)_{0,025} \approx 1,96$ eða sama talan og áður.

Við reiknum þessa leiðréttingu nær aldrei í höndum; tölfræðiforrit sjá um það.

$$df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{n_1} + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{n_2}} - 2$$

$$= \frac{(0{,}0795 + 0{,}158)^2}{(0{,}0795)^2 \cdot \frac{1}{20} + (0{,}158)^2 \cdot \frac{1}{20}} - 2$$

$$= \frac{0{,}0564}{0{,}00632 \cdot \frac{1}{20} + 0{,}0250 \cdot \frac{1}{20}} - 2$$

$$= \frac{0{,}0564}{0{,}000316 + 0{,}0012482} - 2$$

$$= 36{,}056 - 2 = 34{,}056 \approx 34$$

A:7.3, bls. 223–224

Sömu staðalfrávik í þýði

Samlagðar (*pooled*) dreifitölur

Ef gera má ráð fyrir að staðalfrávik séu eins í þýði fyrir báða hópa, $\sigma_1 = \sigma_2$, fæst nákvæm staðalvilla án leiðréttinga.

Formúlan til hliðar byggist á því að bæði úrtaksstaðalfrávikin gefi spá um eitt og sama þýðisstaðalfrávikið. Þá má reikna spágildi fyrir þetta sameiginlega staðalfrávik og nota það til að reikna spágildi staðalvillunnar.

Samlagðar dreifitölur byggja á því að taka núlltilgátuna mjög bókstaflega, þ.e. að gera ráð fyrir að hóparnir komi úr *sama* þýði—ekki einungis að þýðin tvö séu með sama meðaltalið.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)\cdot s_1^2 + (n_2 - 1)\cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

A:7.3, bls. 221–223

Samlagðar dreifitölur

Staðalvilla miðað við samlagðar dreifitölur

Útreikningarnir gefa sömu staðalvilluna og áður. Þetta gerist ef hóparnir eru jafnstórir eins og hjá okkur.

Ef hóparnir eru misstórir og sú forsenda að þýðisstaðalfrávikin séu jafnstór stenst, gefa samlagðar dreifitölur nákvæmari spá um staðalvilluna heldur en aðgreindar dreifitölur.

Munurinn skiptir þó ekki máli nema úrtökin séu lítil eða tölfræðiprófið sé á mörkum þess að vera marktækt.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(19)\cdot 1{,}26^2 + (19)\cdot 1{,}78^2}{38}$$

$$= \frac{19\cdot 1{,}5876 + 19\cdot 3{,}1684}{38}$$

$$= \frac{30{,}1644 + 60{,}1996}{38}$$

$$= \frac{90{,}364}{38} = 2{,}378$$

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{2{,}378\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right)}$$

$$= \sqrt{0{,}2378} \approx 0{,}488$$

A:7.3, bls. 221–223

Samanburður dreifinga

Samanburður þýðisstaðalfrávika með prófi Levenes

Útreikningur prófsins er flókinn, svo við styðjumst við útreikninga úr SPSS.

Við prófum núlltilgátuna að $\sigma_1=\sigma_2$, þ.e. að þýðisstaðalfrávikin séu eins í báðum hópunum.

Ef próf Levenes er marktækt, höfnum við því að staðalfrávikin séu eins í hópunum og lítum á þau sem ólík.

Þá notum við *t*-próf fyrir aðgreindar dreifitölur.

Agresti (bls. 224) mælir með því að nota alltaf *t*-próf fyrir aðgreindar dreifitölur þar sem niðurstöður þess verða svipaðar og fyrir samlagðar dreifitölur nema þegar mikill munur er á dreifitölum úrtaksins.

Hér er tekin hefðbundnari nálgun en sú sem Agresti mælir með.

SPSS birtir próf Levenes þegar beðið er um *t*-próf.

A:7.3, bls. 223–224

Útreikningar í SPSS

Group Statistics

	Hópar	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
EINKUNN	Samanburðarhópur	20	7,00	1,78	,40
	Þjálfunarhópur	20	8,30	1,26	,28

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Mean	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
EINKUNN	Equal variances assumed	,787	,380	-2,668	38	,011	-1,30	,49	-2,29	-,31
	Equal variances not assumed			-2,668	34,261	,012	-1,30	,49	-2,29	-,31

Marktekt fyrir próf Levenes

Færri frígráður þegar gert er ráð fyrir ólíkum þýðisstaðalfrávikum

Spágildi staðalvillu eru þau sömu þar sem hóparnir eru jafnstórir

Forsendur tveggja hópa *t*-prófs

- Normaldreifing í þýði
- Engir frávillingar
- Tilviljunarval í úrtak
- Tilviljunarskipting í hópa
  - Hóparnir þurfa að vera óháðir

Sömu forsendur og fyrir *t*-próf í einum hópi

Ný viðbótarforsenda fyrir *t*-próf í tveimur hópum

Háðir hópar

- *t*-próf óháðra hópa miðast við tilviljunarskiptingu í hópa
  - Í sumum rannsóknarsniðum er þessi forsenda ekki fyrir hendi

Snið með háðum hópum

- Rannsóknir á pörum
- Pörun (*matching*)
- Samanburður við forpróf

A:7.0, bls. 210–211

Hermilíkan fyrir háða hópa

Ef hóparnir eru óháðir hefur frammistaða í öðrum hópnum engin áhrif á frammistöðu í hinum. Í háðum hópum er hins vegar fylgni á milli hópanna, þ.e. frammistaða í öðrum hópnum tengist frammistöðu í hinum.

Háðir hópar verða oft vegna pörunar, þess að sami einstaklingur er metin á ólíkum tímapunktum eða val á einum einstaklingi í annan hópinn hefur áhrif á val einstaklinga í hinn hópinn.

Við getum hermt (*simulate*) bæði óháða og háða hópa, skoðað úrtakadreifingarnar og tengsl meðaltala.

Grunnupplýsingar

$\mu_1 = \mu_2 = 6{,}955$

$\sigma_1 = 1{,}338$ $\sigma_2 = 0{,}934$

$n_1 = n_2 = 20$

Óháðir: $\rho = 0{,}00$

Háðir: $\rho = 0{,}61$

Úrtakadreifing háðra meðaltala

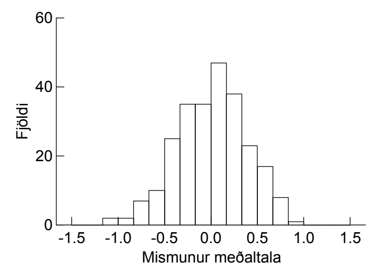
Úrtakadreifing fyrir háð meðaltöl er greinilega minni en fyrir óháð meðaltöl.

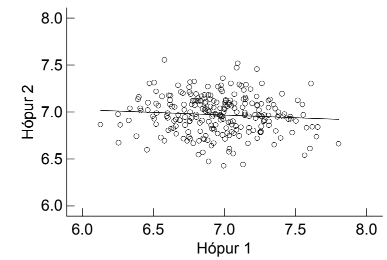
Meðaltöl óháðra hópa er með enga fylgni yfir úrtök en meðaltöl í háðum hópum eru með umtalsverða fylgni.

Úrtakadreifing

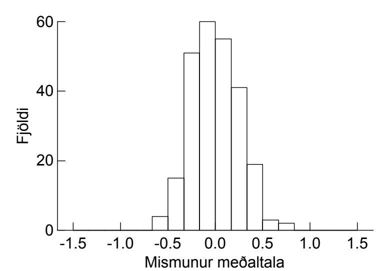
Tengsl meðaltala

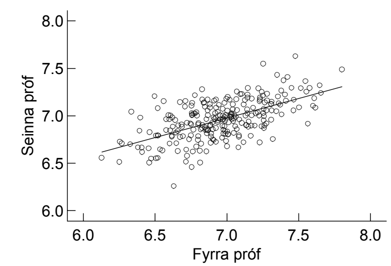
Óháðir hópar





Háðir hópar





Áhrif á staðalvillu

		Óháðir hópar		Háðir hópar	
	Mælitala	Hópur 1	Hópur 2	Hópur 1	Hópur 2
	σ	1,338	0,934	1,338	0,934
Reiknaðar mælitölur	$\sigma_{\overline{X}}$	0,299	0,209	0,299	0,209
	$\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	0,365		0,365	
Monte-Carlo	$s_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}$	0,378		0,245	

Parað *t*-próf

Próf á mismun háðra mælinga

Parað *t*-próf byggist á því að nota mismunatölur. Í stað tveggja háðra mælinga, er notuð ein mismunatala fyrir fyrir hvert par. Parið verður því stakið við prófunina.

Þannig má t.d. draga fyrri mælinguna frá þeirri seinni og prófa niðurstöðuna með *t*-prófi.

Ef enginn munur er á for- og eftirprófi ætti mismunurinn að vera 0,0; þetta má því prófa með einshóps *t*-prófi.

Við tökum mismunartöluna, reiknum staðalfrávik, staðalvillu og framkvæmum *t*-próf.

Staðalfrávik mismunar

$$s_D = \sqrt{\frac{\sum\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{n-1}}$$

Staðalvilla mismunar

$$\hat{\sigma}_{\overline{D}} = \frac{s_D}{\sqrt{N}}$$

Parað t - próf

$$t = \frac{\overline{D}}{\hat{\sigma}_{\overline{D}}}$$

A:7.4, bls. 226–229

Útreikningur paraðs *t*-prófs

Tilgátur

$$T_1: \mu_Þ > \mu_s$$
$$T_0: \mu_Þ \leq \mu_s$$

Marktektarmörk

$$\alpha = 0{,}05$$

Staðalvilla

$$\hat{\sigma}_{\overline{D}} = \frac{s_D}{\sqrt{N}} = \frac{1{,}15}{\sqrt{20}} = \frac{1{,}15}{4{,}472} = 0{,}257$$

Parað *t*-próf

Parað *t* - próf

$$t = \frac{\overline{D}}{\hat{\sigma}_{\overline{D}}} = \frac{1{,}8}{0{,}257} = 7{,}0$$

Vendigildi

$$t(19)_{0{,}05} = 1{,}729$$

Nr.	Þjálfun	Saman burður	Mis munur
1	8	6	2
2	6	5	1
3	9	7	2
4	8	6	2
5	9	6	3
6	10	8	2
7	9	7	2
8	10	7	3
9	10	7	3
10	8	9	-1
11	7	6	1
12	9	10	-1
13	7	6	1
14	9	6	3
15	8	6	2
16	9	6	3
17	6	4	2
18	9	7	2
19	10	8	2
20	9	7	2
$\overline{X}$	8,5	6,7	1,8
s	1,24	1,34	1,15

Parað *t*-próf í SPSS

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	ÞJÁLFUN	8,5000	20	1,2354	,2763
	SAMANB	6,7000	20	1,3416	,3000

Úrtaksupplýsingar

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	ÞJÁLFUN & SAMANB	20	,603	,005

Fylgni milli hópanna

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference: Lower	95% Confidence Interval of the Difference: Upper			
Pair 1	ÞJÁLFUN - SAMANB	1,8000	1,1517	,2575	1,2610	2,3390	6,990	19	,000

Meðatalsmunur

95% öryggisbil

Marktekt

t-prófið sjálft

Staðalvilla svipuð og í Monte-Carlo athugun