Ályktanir í einum hópi

Fyrirlestur í Aðferðafræði II

Tilgátuprófun í einum hópi

Tilgátuprófun reynir að svara tilteknum spurningum um þýðið á grundvelli upplýsinga úr úrtaki.

„Er hlutfall kvenna í Aðferðafræði II það sama og hlutfall kvenna í félagsvísindadeild?“

„Hefur námsframmistaða nemenda breyst frá því í fyrra?“

Tilgátuprófun veitir ekki upplýsingar um nákvæm gildi þýðistalnanna heldur aðeins svör við tilteknum spurningu.

Tilgátuprófun byggist á:

- Tilgátu (*hypothesis*)
  - Aðaltilgátan setur fram spurninguna
  - Núlltilgátan er andhverfa hennar
- Tölfræðiprófi (*statistical test*) og niðurstöðu þess (*test statistic*)
- Líkindum þess að fá niðurstöðu prófsins ef núlltilgátan er rétt (*p*-gildi)

Lítil líkindi benda til rangrar núlltilgátu og réttrar aðaltilgátu

A:6, bls. 154–155

Staðalfrávik þýðis þekkt

Við viljum athuga eiginleika 25 ára gamals greindarprófs.

Meðaltal prófsins á að vera 100 og staðalfrávikið 15. Við viljum vita hvort þessar tölur eigi við börn í dag, þ.e. hvort eiginleikar prófsins hafi haldið sér.

Helstu upplýsingar

$$N = 26$$

$$\overline{X} = 108{,}5$$

$$\mu_0 = 100{,}0$$

$$\sigma_0 = 15{,}0$$

Við höfum aðeins upplýsingar um niðurstöður í úrtaki 26 barna. Meðaltal þeirra er hærra en 100 en ég vil vita hvort þýðismeðaltalið sé annað en 100.

Ég veit staðalfrávikið undir núlltilgátunni og því nota ég *z*-próf.

Næsta skref er að setja fram aðal- og núlltilgátur og prófa þær með viðeigandi tölfræðiprófi.

Tilgátur og formúla

Aðaltilgáta

$T_1 : \mu \neq 100$

Núlltilgáta

$T_0 : \mu = 100$

Ég set fram stefnulausa aðaltilgátu sem segir að meðaltalið í þýði skólabarna í dag sé *ekki* 100.

Ég get ekki prófað aðaltilgátuna beint og set því fram núlltilgátu; andhverfu aðaltilgátunnar.

Þetta er nefnt *z*-próf og er notað ef σ er þekkt (eða N ≥ 30).

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}}$$

Síðan prófa ég T_0 með því að reikna viðeigandi z-gildi. Talan μ_0 er viðmiðunargildi, þ.e. þýðismeðaltalið skv. núlltilgátunni.

A:6.2, bls. 159–161

Útreikningur *z*-prófs

Fyrst reikna ég staðalvilluna.

Síðan ákvarða ég α; ég vel $\alpha = 0{,}05$.

Þá reikna ég út úr prófinu.

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{15{,}0}{\sqrt{26}}$$
$$= \frac{15{,}0}{5{,}099} = 2{,}942 \approx 2{,}94$$

Að lokum túlka ég niðurstöðuna bæði tölfræðilega og efnislega.

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{108{,}5 - 100}{2{,}942} = \frac{8{,}5}{2{,}942} = 2{,}889 \approx 2{,}89$$

$$p < 0{,}01$$

A:6.2, bls. 162–164

Uppfletting í normaltöflu

Hversu líkleg er niðurstaðan undir núlltilgátunni?

Niðurstaða z-prófsins var z= 2,89. Sú tala segir okkur hve líkleg niðurstaðan í úrtakinu er ef núlltilgátan er rétt.

Niðurstaðan segir okkur að meðaltal úrtaksins sé tæpum þremur staðalvillum frá meðaltalinu skv. núlltilgátunni. Við þurfum því að vita hve líklegt er að fá úrtaksmeðaltal sem er þetta langt frá meðaltalinu skv. núlltilgátunni.

Við flettum niðurstöðunni upp í töflu A í Agresti. Skv. henni eru líkindin aðeins 0,0019 ef núlltilgátan er rétt.

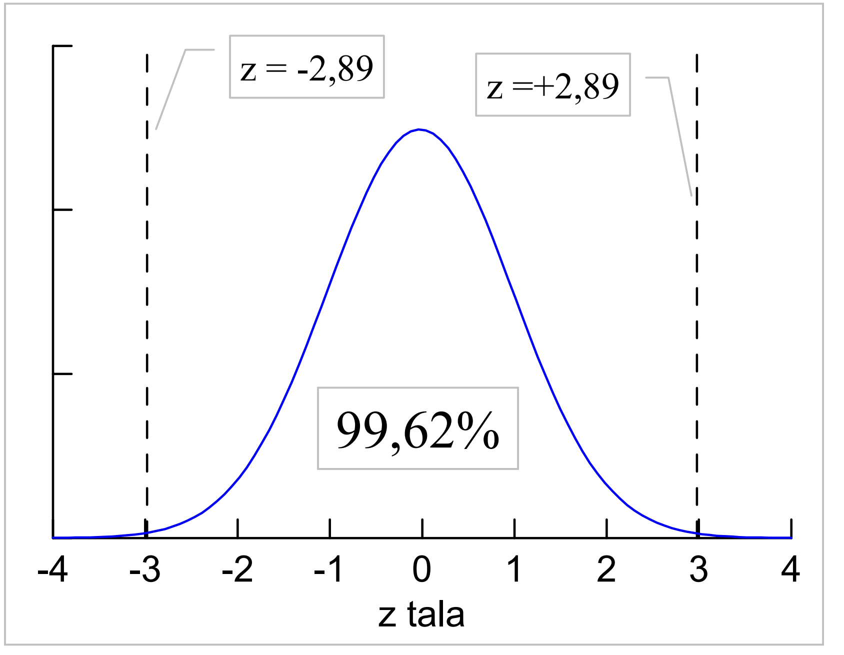
	Annar aukastafur z-gildisins									
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	**0,09**
0,0	0,500	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,460	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,421	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,382	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,345	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,309	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,274	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,242	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,212	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,184	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,159	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,136	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,115	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,097	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,081	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,067	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,055	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,045	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,036	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,029	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,023	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,018	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,014	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,011	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,008	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,006	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,005	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,003	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,003	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	$\boxed{0,0019}$
2,9	0,002	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,00135									
3,5	0,000233									
4,0	0,0000317									
4,5	0,00000340									
5,0	0,000000287									

A:4.2, bls. 88–91

Tölfræðileg túlkun *z*-prófs

Ég vil vita hvort niðurstaða prófsins sé ólíklegt ef núlltilgátan er rétt. Ég lít á tölugildi niðurstöðuna, þ.e. vil vita líkur á þetta miklu fráviki í *aðra hvora áttina*.

Fyrir ofan z= 2,89 eru 0,19% og sama hlutfall fyrir neðan z= –2,89. Ef núlltilgátan (T_0) er rétt eru því minna en 1% (nákvæmlega 0,38%) líkindi á svona miklu fráviki frá μ_0.



A:6.2, bls. 161–162

Réttar og rangar núlltilgátur

Tilgátuprófun og ályktunarreglur

Við höfum komist að því að niðurstaða tölfræðiprófsins er ólíkleg ef núlltilgátan (T_0; H_0) er rétt. Við höfnum henni því og tökum upp aðaltilgátuna.

Við beitum þarna ályktunarreglu; við lítum svo á að niðurstaða með lítil líkindi veiki trú okkar á núlltilgátunni það mikið að okkur er stætt á því að hafna henni.

Ályktunarreglan getur skilað réttri ákvörðun eða brugðist og leitt til rangrar ákvörðunar.

Marktektarstigið α

Við ákveðum fyrir fram hve ólíkleg niðurstaðan þarf að vera áður en við höfnum T_0. Við táknum þessi líkindi með α; algengast er að velja 5% og stundum 1% fyrir alfa.

Ef T_0 er *rétt* eru líkurnar á að hafna henni α; við höfnum henni hvenær sem nægilega ólíkleg niðurstaða næst. Breytileiki úrtaka verður til þess að T_0 er stundum hafnað (ranglega) þótt hún sé rétt.

Stundum er rangri núlltilgátu *ekki* hafnað af sömu ástæðu.

A:6.4, bls. 173–174

Rökfræði tilgátuprófunar

- Tilgátuprófun getur leitt til fjögurra ólíkra ákvarðana
  - Réttri tilgátu hafnað
  - Réttri tilgátu ekki hafnað
  - Rangri tilgátu hafnað
  - Rangri tilgátu ekki hafnað
- Líkur höfnunarmistaka ræðst af α
- Líkur fastheldnimistaka ræðst af staðalvillunni

	Núlltilgáta	
Ákvörðun	Rétt	Röng
Ekki hafna	$1-\alpha$	β
Hafna	α	$1-\beta$
Samtals	1,00	1,00

Afköst

Höfnunarmistök
Mistök af tegund I

Fastheldnimistök
Mistök af tegund II

A:6.4, bls. 173–177

Afköst (*power*)

Afköst: Næmi fyrir frávikum frá T_0

Afköst fela í sér næmi tilgátuprófunar fyrir frávikum frá núlltilgátunni (T_0).

Aukin afköst samsvara auknum líkum þess að hafnað röngum núlltilgátum þ.e. $1-\beta$ hækkar.

Við viljum lágmarka α samfara því að hámarka $1-\beta$. Í reynd er þetta þó mótsagnakennt þar sem afköst minnka að öðru jöfnu við lægra α.

Afköst má auka með því velja hærra α, t.d. 0,05 í stað 0,01.

Stærra úrtak eykur einnig líkindi þess að finna lítil frávik frá viðmiðunargildinu (núlltilgátunni).

Lítil afköst samsvara miklum líkum á því að rangri núlltilgátu sé *ekki* hafnað.

A:6.7, bls. 193–195

Takmarkanir tilgátuprófunar

Takmarkanir

Núlltilgátum verður aðeins hafnað en aldrei samþykktar. Ef tilgáta reynist ekki marktæk getur það verið vegna of lítilla afkasta (*power*).

Ef núlltilgátu er hafnað ber að líta svo á að aðaltilgátan sé rétt. Það þýðir ekki að hún *sé* raunverulega rétt né að mikill munur sé á þýðistölunni og viðmiðunargildinu.

Flestar núlltilgátur eru rangar strangt til tekið. Það er sjaldnast sem þýðistala er nákvæmlega jöfn viðmiðsgildinu.

Möguleg viðbrögð

Gæta að því að afköst séu nægjanleg svo áhugaverð frávik frá viðmiðsgildinu séu líkleg til að uppgötvast

Vanda alla þætti rannsókna svo utanaðkomandi þættir auki ekki dreifingu úrtaksins

Reikna öryggisbil fyrir þýðistöluna til að átta sig á raunverulegri stærð hennar

A:6.4, bls. 178–180

Tilgátuprófun þegar σ er óþekkt

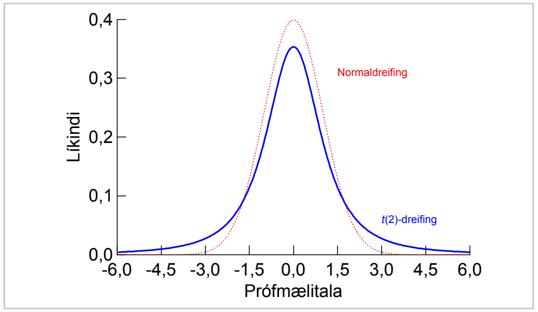
Ef við þekkjum staðalfrávik þýðis getum við reiknað nákvæma staðalvillu og áætlað úrtakadreifinguna með normaldreifingu.

Ef staðalfrávik þýðis er óþekkt höfum við aðeins spágildi þess. Spágildið er breytilegt milli úrtaka og ónákvæmt mat á staðalfráviki þýðis. Þetta veldur ónákvæmni í staðalvillunni og breytir úrtakadreifingunni.

Úrtakadreifing meðaltals er *t*-dreifing en ekki normaldreifing þegar staðalfrávik þýðis er óþekkt.

t-dreifing er með lengri hala en normaldreifing og því þarf meiri frávik frá núlltilgátu fyrir *t*-próf heldur en *z*-próf.

Þegar úrtakið er stórt (t.d. $df \geq 30$) er *t*-dreifing eins og normaldreifing.



df	$t_{0,025}$
1	12,71
2	4,30
3	3,18
4	2,78
5	2,57
6	2,45
7	2,36
8	2,31
10	2,23
15	2,13
20	2,09
25	2,06
30	2,04
40	2,02
50	2,01
75	1,99
100	1,98
1000	1,96
z	1,96

A:6.5, bls. 180–183; 187

Breytist þol við líkamsrækt?

Tilgátur

$T_1 : \mu \neq 50{,}2$

$T_0 : \mu = 50{,}2$

Við setjum fram aðal- og núlltilgátu …

… og að síðustu reiknum við t-prófið með þessari formúlu

Grunnupplýsingar

$N = 20$

$\mu_0 = 50{,}2$

$\overline{X} = 53{,}1$

$s = 6{,}8$

… öflum upplýsinga um úrtakið …

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}}$$

$df = N - 1$

μ_0 : viðmiðsgildi

A:6.5, bls. 180–181

Útreikningur *t*-prófs í einum hópi

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{6,8}{\sqrt{20}} = 1,5205 \approx 1,52$$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}} = \frac{53,1 - 50,2}{1,5205} = \frac{2,9}{1,5205} = 1,9072 \approx 1,91$$

$$t(19)_{0,025} = 2,093 \text{ skv. töflu B á bls. 669 í Agresti}$$

Niðurstaðan er lægri en vendigildið svo við höfnum ekki núlltilgátunni.

Uppfletting í *t*-töflu

Hversu líkleg er niðurstaðan undir núlltilgátunni?

Niðurstaða t-prófsins var $t(19) = 1{,}91$. Þá tölu má túlka svipað og niðurstöðu *z*-prófs, þ.e. sem líkindi niðurstöðunnar í úrtakinu ef núlltilgátan er rétt.

Við förum í töflu B í Agresti. Við þurfum að fletta upp skv. α-gildi og frígráðum. Við miðum við α=0,05; þar sem prófið var tvíhliða flettum við upp $^{\alpha}/_{2}$, þ.e. 0,025. Frígráðurnar eru N–1, þ.e. 19.

Vendigildið skv. töflunni er 2,09. Þar sem niðurstaða prófsins er lægri eru meira en 5% líkur á niðurstöðunni undir T_0.

df	$t_{0,100}$	$t_{0,050}$	$t_{0,025}$	$t_{0,010}$	$t_{0,005}$
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,33	1,73	$\boxed{\mathbf{2,09}}$	2,54	2,86
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58

A:4.2, bls. 88–91

Öryggisbil fyrir þýðismeðaltal

95% öryggisbil nær frá tæplega 50 upp í rúmlega 56. Öll gildi á því bili eru því sennileg meðaltöl í þýði líkamsræktarstöðvargesta.

Við getum ekki gert upp á milli þessara möguleika og getum ekki staðhæft að eitthvert eitt þeirra sé rétt meðaltal fyrir þýðið.

Öryggisbil fyrir þýðismeðaltal

$$\bar{X} - t_{\frac{1}{2}\alpha} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{1}{2}\alpha} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

$$df = 19$$

$$t(19)_{0,025} = 2,093$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = 1,5205$$

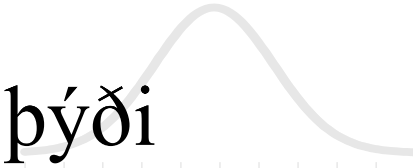
$$53,1 - 2,09 \cdot 1,52 < \mu < 53,1 + 2,09 \cdot 1,52$$

$$49,92 < \mu < 56,28$$

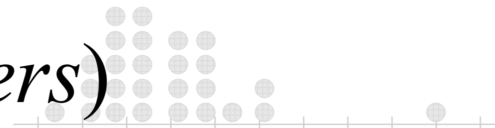
A:6.5, bls. 183–184

Forsendur *t*-prófs

- Normaldreifing í þýði



- Engir frávillingar (útlagar; *outliers*)



- Tilviljunarval í úrtak

A:6.5, bls. 186–187

Tvíhliða próf

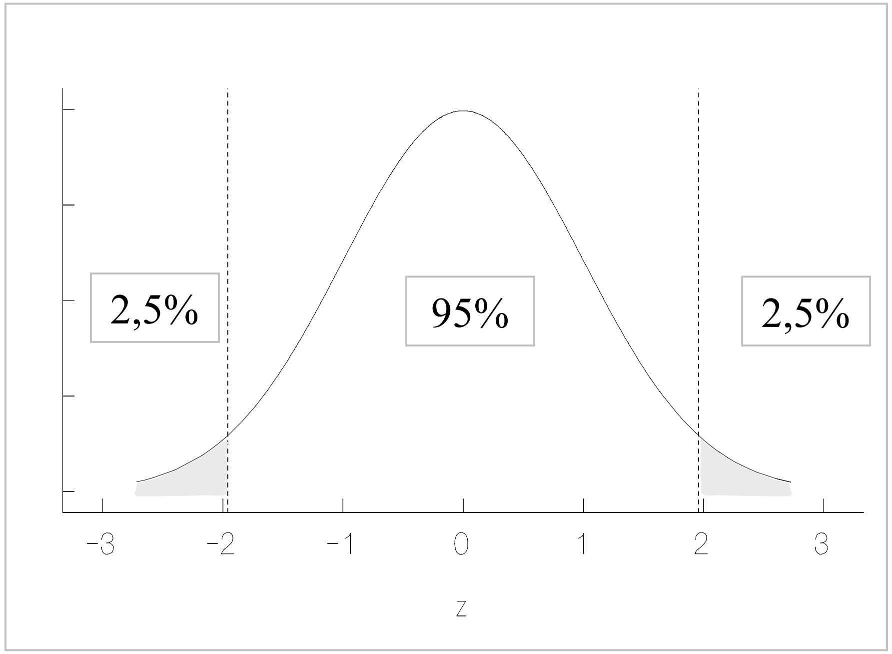
Tvíhliða próf

T_1: $\mu \neq \mu_0$ T_0: $\mu = \mu_0$

T_0 er röng ef $\mu < \mu_0$ *eða* $\mu > \mu_0$

Við höfnum núlltilgátunni ef líkindin eru ½α að fá þetta mikið frávik í *aðra hvora* áttina.

T_0 er hafnað ef meðaltalið er *hærra* eða *lægra* en viðmiðunargildið



A:6.2, bls. 161–162

Einhliða próf

T_0 er hafnað ef meðaltalið er *hærra* en viðmiðunargildið

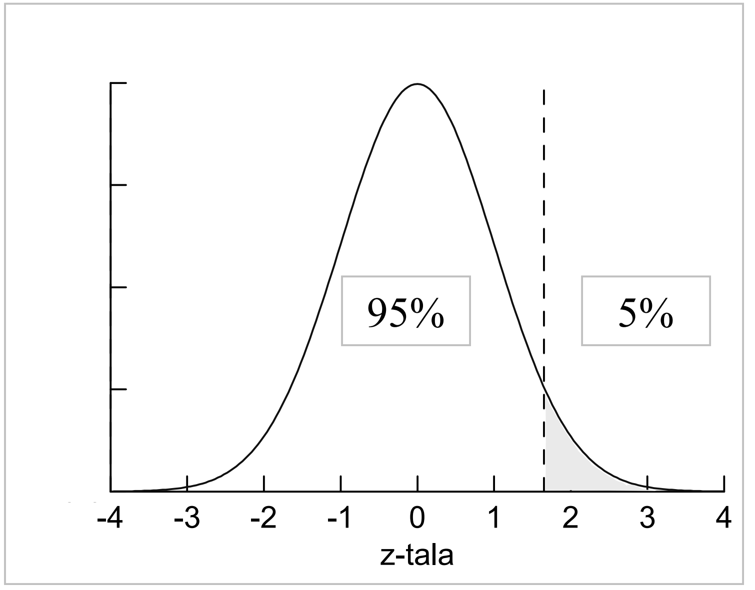
Einhliða próf

T_1: $\mu > \mu_0$ og T_0: $\mu \leq \mu_0$

eða

T_1: $\mu < \mu_0$ og T_0: $\mu \geq \mu_0$

T_0 er hafnað ef meðaltalið er *lægra* en viðmiðunargildið



Við höfnum núlltilgátu ef líkindin eru α að fá þetta mikið frávik í *sömu átt* og aðaltilgáta tilgreinir

A:6.2, bls. 165–167

Eykst þol við líkamsrækt?

Tilgátur

$T_1 : \mu > 50{,}2$

$T_0 : \mu \leq 50{,}2$

Grunnupplýsingar

$N = 20$

$\mu_0 = 50{,}2$

$\overline{X} = 53{,}1$

$s = 6{,}8$

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{N}} \approx 1{,}52$$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}} \approx 1{,}91$$

$t(19)_{0{,}05} = 1{,}729$ skv. töflu B á bls. 669 í Agresti

Við einhliða prófun er niðurstaða *t*-prófsins hærri en vendigildið.

Við höfnum því núlltilgátunni og tökum upp aðaltilgátuna að þolið sé *hærra* en hjá Íslendingum almennt.